Professor Krafts

Anmerkninger

over de Liigheder, i hvilke at flere Værdier af den ubekiendte Størrelse ere lige store.

No. I.

Jeg har i dette Stykke satt mig for, at afhandle for sig selv allene en Grund-Lærdom, som jeg behøver i det efterfølgende Stykke, fra hvilket jeg har skilt den for at afhandle et andet Problema, hvilket, u-agtet at det er bleven tilforn baade fundet, og paa adskillige Maader beviist; dog staaer i en saa nøye Forbindelse med den Proposition, som jeg bruger i det efterfølgende Stykke, saa jeg ikke har taget i Betænkning at udføre, hvorledes det og ved dens Hielp kand findes, allermeest, da den fører til en Maade at opløse paa, som af alle synes at være den meest Analytiske.

Dette Problema angaaer elevationem Binomii eller Multinomii, som først er blevet af Hr. Neuton indbefattet under denne almindelige Regel

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + + \text{ \&c.}$$

hvilket kand sees af hans Brev til Henric Oldenburg. Af det Svar, som Hr. Leibnitz den Tiid gav, kand man see at denne Methode har samme Tiid endnu ikke været ham bekiendt, og da ved Neutons Formule intet viidere Beviis fandtes, har det vel været Leibnitz en Anledning til selv at optænke et, som kand sees af hans Breve-Verling med Hr. Johan Bernoulli, hvor hand siger pag. 47. excogitavi autem olim

olim mirabilem Regulam pro numeris coefficientibus potestatum non tantum a binomio $x + y$, sed & a trinomio $x + y + z$, imo a polynomio qvocunqve, ut data Potentia gradus cujuscunqve v. g. 10mi. & potentia in ejus valore comprehensa, possim statim assignare numerum coefficientem sine ulla tabula jam calculata. Af det Svar, som Hr. Johan Bernoulli gav, er det klart, at denne Regul samme Tiid er blevet ham bekiendt, uden Tviil ved et Beviis, som hand siden har ladet komme for Lyset.

Dette Beviis har stor Liighed med, og er fast det samme, som man finder hos en Deel andre Skribentere, som siden har skrevet; Det af Hr. Baron Wolf, som er vel et med, af de bekiendteste, synes at være mindre vigtigt, siden det beroer paa en simpel Induction; den, som har af alle givet det mest artige Beviis er Hr. Sterling i hans smukke Afhandling de Lineis tertii ordinis Neutonianis. Min Maade, som har intet tilfælles med de foregaaende, skal sees af det Efterfølgende.

§. 1.

Naar en Liighed er given

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4}$$
$$- - - - - - - + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0.$$

i hvilken alle Værdierne af den ubekiendte x antages for at være ligestore, og man vil finde den næst nedrigere Høyde, da har man allene nødig at multiplicere et hvert Stykke af den givne Liighed med sin behørige Exponent, og siden dividere med den ubekiendte Størrelse x, multipliceret med det første Stykke af den arithmetiske Progression saaledes:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + + \&c. + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$$
$$m. \quad m-1. \quad m-2. \quad - - - - 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0$$

$$mx^m + \overline{m-1}\,ax^{m-1} + \overline{m-2}\,bx^{m-2} + + \&c. -$$
$$+ 3fx^3 + 2gx^2 + hx = 0$$

$$x^{m-1} + \frac{m-1}{m}ax^{m-2} + \frac{m-2}{m}bx^{m-3} + + \&c.$$
$$+ \frac{3}{m}fx^2 + \frac{2g}{m}x + \frac{h}{m} = 0.$$

hvilket

hvilket altid er den næst nedrigere Høyde af $\overline{x + \alpha}^m$ saa fremt at $x = \mp \alpha$.

Exempel. Den tredie Høyde af $x - \alpha = 0$ er

$$x^3 - 3\alpha x^2 + 3x\alpha^2 - \alpha^3 = 0$$

Ved at multiplicere med den arithmetiske Progression.

$$\begin{array}{cccc} 3. & 2. & 1. & 0. \end{array}$$

faaes $3x^3 - 6\alpha x^2 + 3x\alpha^2 - 0$. og ved at dividere med $3x$ faaes

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha\alpha = 0$$

som er den næst nedrigere Høyde af den givne Liighed $x^3 - 3x\alpha^2 - \alpha^3 = 0$.

§. 2.

Den næst nedrigere Høyde faaes og ved at dividere den givne Liighed

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + + \&c. + fx^3 + gx^2 + hx + 2 = 0$$

med $x + \alpha = 0$ hvorved faaes en dobbelt Værdie af den nedrigere Høyde.

§. 3.

Følgelig om $x = \mp a$, og den givne Liighed er

$$x^m + ax^{m-1}\alpha + bx^{m-2}\alpha^2 + cx^{m-3}\alpha^3 + \&c.$$

$$. - - - - + fx^3\alpha^{m-3} + gx^2\alpha^{m-2} + hx\alpha^{m-1} + \alpha^m = 0$$

da bliver § 1. 2.

$$x^{m-1} + \frac{m-1}{m} ax^{m-n}\alpha + \frac{m-2}{m} bk^{m-3}\alpha\alpha +$$

$$\frac{m-3}{m}c\, x^{m-4}\alpha^3 + \&c.$$

$$= x^{m-1} + \overline{a-1}\, x^{m-2}\alpha + \overline{b-a+1}, x^{m-3}\alpha\alpha$$

$$\overline{+ c - b + a - 1}\, x^{m-4}\alpha^3 + + \&c.\ F - rx^2\alpha^{m-3} + \&c. -$$

Ved at sammenligne Coefficienterne faaes

1) $\frac{m-1}{m}a = a - 1$

$$a = m$$

2) $b - a + 1 = \frac{m-2}{m}b$

$$\frac{mm-m}{2} = b$$

$$\frac{\overline{m-1}.m}{1.2.} = b$$

3) $c - b + a - 1 = \frac{m-3}{m}c$

$$\frac{m^2.\overline{m-1} - 2m^2 + 2m}{1.2.3.} = c$$

Tællernes Divisores findes efter de bekiendte Methoder at være

$m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$, saa

$$c = \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3.}$$

4) $d - c + b - a + 1 = \frac{m-4}{m}d$

$$\frac{m}{4}.\left(\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3.} - \frac{\overline{m-1}.m}{1-2} + \frac{m}{1} - 1\right) = d$$

$$\frac{m}{4}.\frac{(m^3 - 6m^2 + 11m - 6)}{1.2.3.} = d$$

Divisores af $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$ findes at være

$m-1$, $m-2$, $m-3$, saa

$$d = \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4.}$$

og den givne Liighed

$$x^m + ax^{m-1}\alpha + bx^{m-2}\alpha\alpha + cx^{m-3}\alpha^3 + \&c.$$
$$------ + fx^3\alpha^{m-3} + gx^2\alpha^{m-2} + hx\alpha^{m-1} + \alpha^m = 0$$

forandres til denne anden.

$$x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}\alpha + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2}x^{m-2}\alpha^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}x^{m-3}\alpha^3 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4}x^{m-4}\alpha^4 + + \&c.$$

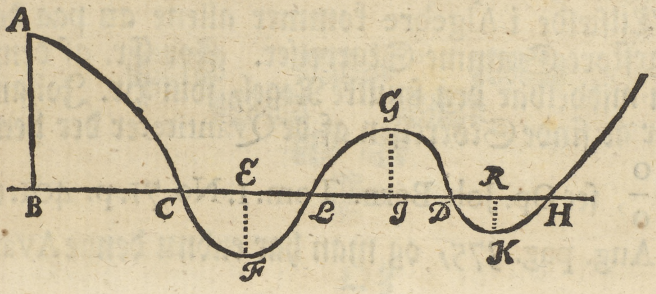
og Coefficienten til den Terminus r, er

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ -----\ \overline{m-r+2}}{1.\ 2.\ 3.\ -----\ \times\overline{r-1}},$$ videre vil jeg ikke vise hvorledes denne Regel kand forkortes, og føres til en nærmere Expression, men slutte med Beviiset af den 1ste §.

§. 4. Theoreme.

Dersom i en Liighed 2 Stamme-Størrelser (Radices) ere lige store, da skal Differential-Liigheden blive $=0$ ved den samme Værdie af den ubekiendte x, som giør, at den først givne Liighed $=0$, og i Almindelighed bliver saa mange Differential-Liigheder $=0$, som der findes lige store Stammestørrelser i den givne Liighed, og derimod i ingen anden Tilfælde

Beviis



thi

thi forestilles enhver Liighed til en ubekiendt Størrelse under den Skikkelse $y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} ++ \&c. + d$, da ere de Linier BC, BL, BD, BH som gaaer fra B, hvor $X = 0$ til den krumme Linies vertices i C, L, D, H, Stammestørrelserne til Liigheden $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} ++ \&c. + d = 0$. Differentieris denne Liighed, da ere de Linier BE, BI, BR, som svarer til Puncterne, hvor Ordinaterne FE, GI, RK ere de største, Stamme-Størrelserne til Differential-Liigheden. Saafremt de to Stammestørrelser ere lige store i Liigheden $ax^m + bx^{m-1} ++ \&c. = 0$, maae for Ex. BC og BL falde sammen i C, saa $BL = BC$, men da er og nødvendig $BE = BC$, følgelig har Differential-Liigheden endnu en af de ligestore Stammestørrelser. Saafremt $BC = BL = BD$, maae og i Differential-Liigheden $BE = BI$, følgelig bliver den $= 0$ ved to af de ligestore Stammestørrelser. o. s. v.

Endelig, da man igien kand applicere den selvsamme Slutning paa alle de andre høyere Differential-Liigheder, ved at ansee dem, som Differential-Liigheder af den første Orden, saa følger deraf Indholden af Propositionen.

§. 5. Forklaring.

Deraf flyder u-middelbar den 1ste §, thi den Methode ved en Arithmetisk Progression er den samme, som den anden ved Differentiationen, og de Imaginaire Størrelser kunde i denne Henseende ikke have anden Beskaffenhed end de reelle. I øvrigt vil jeg allene sige, at Nytten af denne Proposition er u-endelig, siden tiit og ofte de allervigtigste Tilfælde i Algebre kommer allene an paa de Liigheder, som have ligestore Stamme-Størrelser. For Ex. af denne Proposition flyder u-middelbar den smukke Regel, som Hr. Johan Bernoulli har givet for at finde Størrelsen af de Qvantiteter der henhøre til den Formule af $\frac{0}{0}$, see Op. Joh. Bern. Tom. I. No. 71. p. 401. eller og Acta Lips. 1704. Aug. pag. 375, og man har endnu denne Avantage mere,

at

at man ved dens Hielp strax seer, hvor mange Differentiationer man maae bruge, naar Qvantiteten settes først under den Skikkelse $\frac{\varphi.(a-x)^n}{\varphi^I.(a-x)^n}$, ($\varphi$ og φ^I betyder to Functioner af de samme Ubekiendte og af andre Bekiendte) hvilket efter Mr. Bernoulli Raisonnement ikke strax kunde sees, som og har været Aarsag til, at denne Regel (saavelsom mange andre) er ufuldstændig hos Marquis de l'Hospital i hans Analyse des Infiniment petits. Sect. 9. Propos. I. pag. 145. Edit. Par.

Det er ikke i denne ene Tilfælde, at Differential-Methoderne kunde hielpes ved denne Proposition, der er en Mængde af andre, og hører her hid den Forbedring paa Marquis de l'Hospitals Methode om Tangenterne, som Mr. Saurin artig har indført i de Pariser Memoires for Aarene 1716 og 1723, i de Tilfælde da de krumme Linier har Puncta multiplicia.

§. 6. Anmerkning.

Af det foregaaende Beviis §. 5. sees øyensynlig en Sandhed, som meget bruges i Algebre, at saa tiit som to Størrelser satte i Steden for den Ubekiendte i en Liighed giver den ene + den anden –, at da Stammestørrelsen selv maae være imellem begge, siden det er u-imodsigeligt, at Ordinaterne paa den ene Side for Ex. af det Punct C, maae bestandig være positive, imidlertid at de paa den anden Side altid bliver negative.